Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego da se koncentrišu na njihova rješenje. Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi iz predmeta „Inžinjerska matematika III“, koju možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Jedna od poznatih latinskih izreka je: Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.

Nastavak lekcije: **Uvod u teoriju vjerovatnoće**

Geometriska vjerovatnoća

Geometriska vjerovatnoću koristimo na slučaj kada imamo neprobrojivo mnogo ishoda. Na primjer, pretpostavimo da imamo na pravoj, u ravni ili prostoru neku oblast G i u njoj sadržanu drugu oblast g. Ako je E događaj da tačka padne u oblast g kod slučanog bacanja tačke u oblast G, tada je

$$P(E) = \frac{\text{mjera oglasti } g}{\text{mjera oglasti } G}$$

Primjetimo da često mjere oblasti g i G možemo izračunati pomoću integrala.

1. Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 11 i 12 sati, gdje će prvi prijatelj najviše čekati 20 minuta, dok će drugi prijatelj najviše čekati 10 minuta. Naći vjerovatnoću p da će se prijatlji susresti.

2. U kocki ivice a upisana je lopta. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u kocki pripada i upisanoj lopti.

3. U lopti poluprečnika R upisana je kocka. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u lopti pripada i upisanoj kocki?

4. U ravni sa paralelnim pravama na rastojanju $2a$ nasumice je bačena igla dužine 2ℓ $(\ell < a)$. Naći vjerovatnoću da je igla presjekla jednu od pravih (ovo je tzv Bifonov problem).

5. Naći vjerovatnoću da korijeni kvadratne jednačine $x^2 + 2ax + b = 0$ budu realni, ako se zna da su vrijednosti koeficijenata a i b jednako vjerovatne i da je $|a| \le m$, $|b| \le n$.

Nezavisni događaji

Za dva događaja E i F kažemo da su nezavisni ako

$$P(EF) = P(E)P(F).$$

Prema jednakosti $P(E|F) = \dfrac{P(EF)}{P(F)}$ ovo povlači da su E i F nezavisni ako $P(E|F) = P(E)$ (što također povlači da je $P(F|E) = P(F)$). To jest, E i F su nezavisni događaji ako znanje da se F pojavilo ne utiče na vjerovatnoću pojavljivanja događaja E. Tj. pojavljivanje događaja E je nezavisno od pojavljivanja događaja F.

Za dva događaja E i F koja nisu nezavisna kažemo da su zavisna.

6. Ako je $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$ i $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ izračunati

(a) $P(A \cup B)$; (b) $P(B|A)$; (c) Da li su A i B nezavisni događaji? Objasniti!

7. Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Neka je E_1 događaj da je suma dvije bačene kockice 6, a neka je F događaj da je prva kockica jednaka 4. Da li su događaji E_1 i F nezavisni?

8. Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Ako sa E_2 označimo događaj da je suma dvije bačene kockice 7, a sa F događaj da je prva bačena kockica jednaka 4, da li su tada događaji E_2 i F nezavisni?

9. Pretpostavimo da izvlačimo kuglicu iz kutije koja sadrži četiri kuglice sa brojevima 1, 2, 3 i 4. Sa E, F i G označimo sljedeće događaje: $E = \{1, 2\}$, $F = \{1, 3\}$ i $G = \{1, 4\}$. Da li su E, F i G parno nezavisni događaji?

Bajesova formula

Neka su E i F događaji. Događaj E možemo napisati kao

$$E = EF \cup EF^C$$

zato što, da bi tačka bila u E, ona mora ili biti u E i F ili mora biti u E ali ne u F. Kako su EF i EF^C međusobno isključivi, imamo da

$$P(E) = P(EF) + P(EF^C) = P(E|F)P(F) + P(E|F^C)P(F^C).$$

Bejesova formula glasi

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}.$$

10. Posmatrajmo dva šešira koja sadrže kuglice. Prvi šešir sadrži dvije bijele i sedam crnih kuglica, a drugi šešir sadrži pet bijelih i šest crnih kuglica. Bacamo novčić i u zavisnosti od izlaza pisma ili glave izvlačimo kuglicu iz prvog ili drugog šešira. Kolika je uslovna vjerovatnoća da je novčić pokazao glavu ako nam je poznato da smo izvukli bijelu kuglicu.

11. U odgovaranju na pitanja koja imaju višestruke odgovore na testu student ili zna odgovor ili pogađa odgovor. Neka je p vjerovatnoća da student zna odgovor a $1 - p$ vjerovatnoća da student ne zna odgovor. Pretpostavimo da student koji pogađa odgovor će tačno pogoditi sa vjerovatnoćom $\frac{1}{m}$, gdje je m broj višestrukih-odgovor alternativa. Kolika je uslovna vjerovatnoća da student zna odgovor na pitanje ako je dato da je odgovorio tačno?

12. Laboratorijski test krvi je 95% efikasan u otkrivanju određene bolesti kada je, u stvari, ta bolest prisutna. Ali, sa druge strane, test također daje „pogrešan pozitivan“ rezultat za 1% testiranih osoba koje su zdrave. (Tj. ako se zdrava osoba testira, tada, sa vjerovatnoćom od $0,01$ test kao rezultat daje da osoba ima datu bolest.) Ako $0,5$ postotaka populacije zaista ima datu bolest, kolika je vjerovatnoća da osoba ima datu bolest, ako nam je dato da je rezultat testa pozitivan.

13. Pretpostavimo da imate tri sandučića u koje možete dobiti pismo. Znate da jedno pismo ovih dana mora doći i da može biti u bilo kojem od tri data sandučića. Neka je α_i vjerovatnoća da ćete pronaći svoje pismo brzim pregledom sandučića i ($i = 1, 2, 3$) ako je pismo stiglo. (Možemo pretpostaviti da je $\alpha_i < 1$.) Pretpostavimo da ste nabrzinu pretražili sandučić 1 i da niste našli pismo. Kolika je vjerovatnoća da je pismo u sandučiću 1?

Geometrijska vjerovatnoća

Geometrijsku vjerovatnoću koristimo na slučaj kada imamo neprebrojivo beskonačno mnogo ishoda.

Na primjer, pretpostavimo da imamo na pravoj, u ravni ili prostoru, neku oblast G i u njoj sadržanu drugu oblast g.

Ako je E događaj da tačka padne u oblast g kod slučajnog bacanja tačke u oblast G, tada je

$$P(E) = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

gdje $mes(*)$ označava mjeru date oblasti.

Primjetimo da često mjere oblasti g i G možemo izračunati pomoću integrala.

(#) Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 11 i 12 sati, gdje će prvi prijatelj najviše čekati 20 minuta, dok će drugi prijatelj najviše čekati 10 minuta. Naći vjerovatnoću p da će se prijatelji susresti.

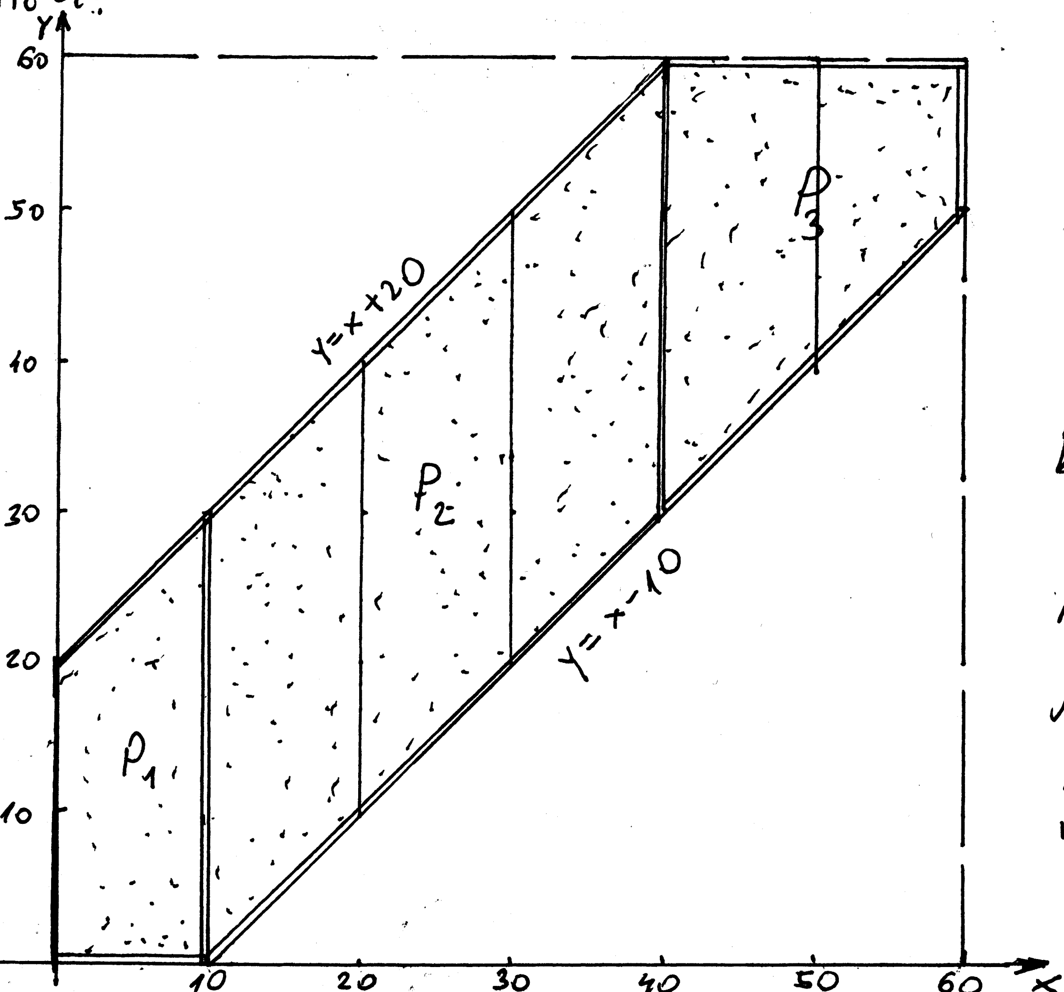
Rj.

Sa x označimo minute dolaska prvog prijatelja a sa y minute dolaska drugog prijatelja. Tako npr. ako je $x=10$ to znači da je prvi prijatelj došao u 11:10, a ako je $x=20$, $y=25$ to znači da je prvi prijatelj došao u 11:20 a drugi prijatelj došao u 11:25.

Posmatrajmo sljedećih nekoliko slučajeva

$x=0$	$\Rightarrow$	$0\le y\le 20$	$x=30$	$\Rightarrow$	$20\le y\le 50$
$x=10$	$\Rightarrow$	$0\le y\le 30$	$x=40$	$\Rightarrow$	$30\le y\le 60$
$x=20$	$\Rightarrow$	$10\le y\le 40$	$x=50$	$\Rightarrow$	$40\le y\le 60$

Grafički:



Da bi rješili zadatak trebamo još pronaći površinu istačkanog dijela na slici, kao i površinu čitavog kvadrata. Površina kvadrata je 60^2.

Površinu istačkanog dijela ćemo odrediti pomoću

pomoću dvostrukog integrala.

Površina istočkanog dijela $= P_1 + P_2 + P_3$

$$P_1 = \iint_{D_1} dx\,dy = \int_0^{10} dx \int_0^{x+20} dy = \int_0^{10} (x+20)\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{10} + 20x\Big|_0^{10} = 250$$

$$P_2 = \iint_{D_2} dx\,dy = \int_{10}^{40} dx \int_{x-10}^{x+20} dy = \int_{10}^{40} 30\,dx = 30 \cdot x\Big|_{10}^{40} = 900$$

$$P_3 = \iint_{D_3} dx\,dy = \int_{40}^{60} dx \int_{x-10}^{60} dy = \int_{40}^{60} (70-x)\,dx = 70 \cdot x\Big|_{40}^{60} - \frac{1}{2}x^2\Big|_{40}^{60} = 400$$

Tražena vjerovatnoća je

$$p = \frac{250+900+400}{60^2} = \frac{1550}{3600} = \frac{155}{360} = \frac{31}{72} \approx 0{,}4306$$

U kocki ivice a upisana je lopta. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u kocki pripada i upisanoj lopti.

Rj.

Ako je lopta upisana u kocku, njen poluprečnik je jednak polovini ivice kocke tj. $R = \frac{a}{2}$. Neka je D događaj "da slučajno izabrana tačka kocke pripada i lopti". Broj tačaka koje su u kocki ili u lopti je beskonačan, pa ćemo kao mjeru tih prostora koristiti zapremine tih tijela, tj.

$$P(D) = \frac{V_{lopte}}{V_{kocke}} = \frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$$

(#) U lopti poluprečnika R upisana je kocka. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u lopti pripada i upisanoj kocki?

Rj:

Ako je kocka upisana u loptu, njena dijagonala je jednaka prečniku lopte tj. $D=2R$.
Dijagonala kocke se računa pomoću ivice na sljedeći način $D=a\sqrt{3}$ pa je

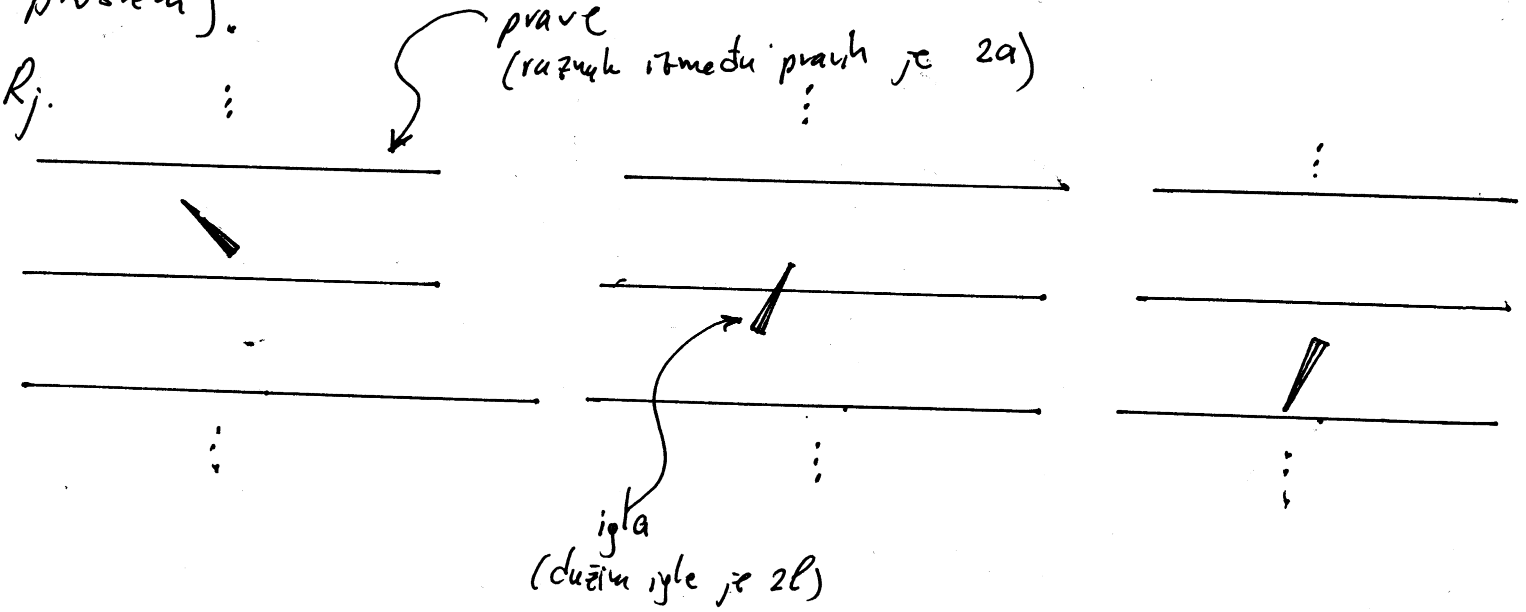
$$2R=a\sqrt{3} \Rightarrow a=\frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Označimo sa E događaj "da slučajno izabrana tačka lopte pripada i kocki".
Broj tačaka koje su u kocki ili u lopti je beskonačan, pa ćemo kao mjeru tih prostora koristiti zapremine tih tijela.
Tada se vjerovatnoća izražava kao količnik zapremine ta dva tijela tj.

$$P(E)=\frac{V_{kocke}}{V_{lopte}}=\frac{a^3}{\frac{4}{3}R^3\pi}=\frac{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3}{\frac{4}{3}R^3\pi}=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\approx 0,3674$$

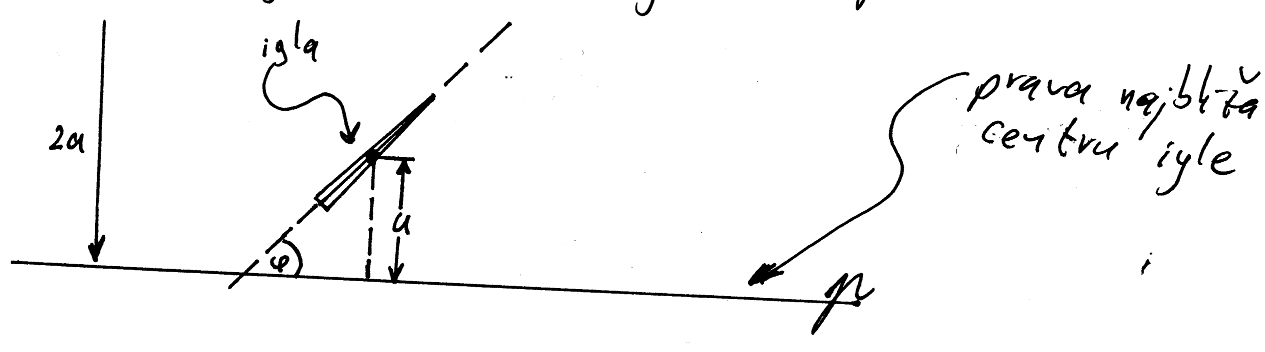
(#) U ravni sa paralelnim pravima na rastojanju $2a$ nasumice je bačena igla dužine $2l$ $(l < a)$. Naći vjerovatnoću da je igla presjekla jednu od pravih (ovo je tzv Bifonov problem).

Rj.



Najprije ustanovimo šta je prostor elementarnih događaja u ovom problemu.

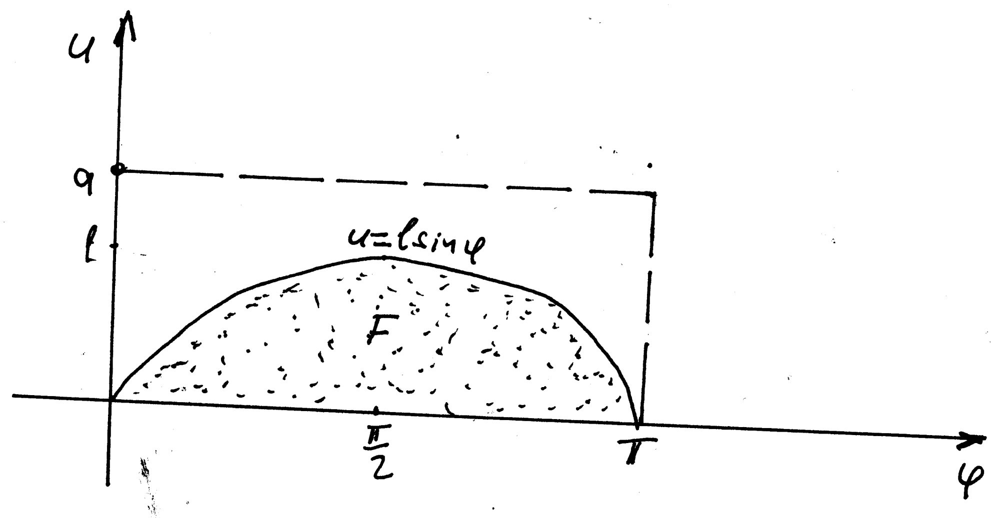
Primjetimo da je centar (sredina) igle jednoznačno određen pa neka je u rastojanje centra igle od najbliže prave, a sa φ označimo ugao između igle i te prave.



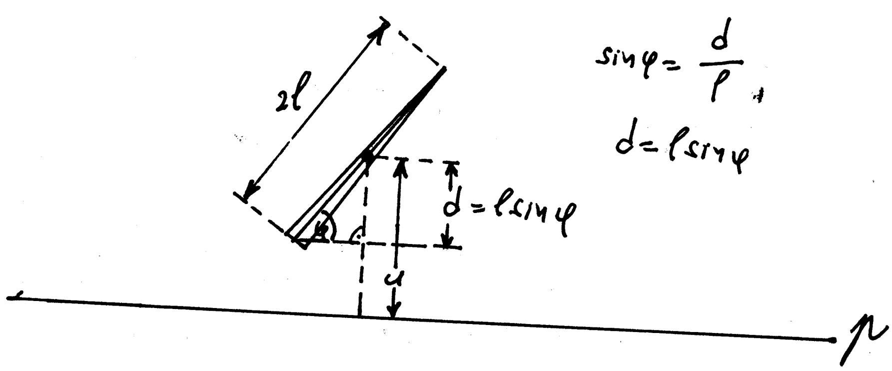
Par (φ, u) određuje položaj igle sa tačnošću do izbora konkretne prave. Kako nas interesuje uzajamni položaj igle i najbliže prave, to sve prave možemo zanemariti, pa za prostor elementarnih događaja uzeti skup

$$E = \{(\varphi, u) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, \ 0 \leq u \leq a\}$$

Prikažimo ovaj skup E u pravougaonom koordinatnom sistemu, gdje ćemo umjesto x-ose uzeti φ a za y-osu uzeti u.



Kada imamo presjek igle i prave?



$\sin\varphi = \dfrac{d}{l}$,

$d = l\sin\varphi$

Presjek igle i prave imamo ako i samo ako je $u \leq l\sin\varphi$ (vidi sliku iznad). Na taj način događaj koji nas zanima određen je skupom

$$F = \{(\varphi, u) \mid u \leq l\sin\varphi\}$$

(nacrtajmo ovaj skup u pravougaonom koordinatnom sistemu). Inače tražena vjerovatnoća p posmatranog događaja je odnos površina skupova F i E. Kako je

$$P_{skupa\,F} = \int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = 2l, \quad P_{skupa\,E} = a\pi$$

to konačno imamo $p = \dfrac{2l}{a\pi}$ tražena vjerovatnoća.

(#) Naći vjerovatnoću da korijeni kvadratne jednačine $x^2+2ax+b=0$ budu realni, ako se zna da su vrijednosti koeficijenata a i b jednakovjerovatne i $|a| \leq m$, $|b| \leq n$.

Rj:

$$x^2+2ax+b=0$$

$$D=4a^2-4b$$

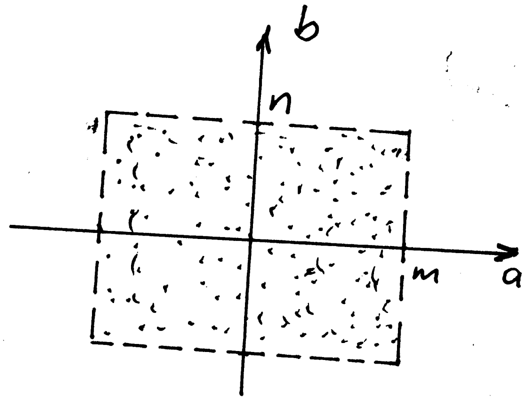
za $D \geq 0$ kvadratna jednačina ima realne korijene.

U našem slučaju $4a^2-4b \geq 0$

$$a^2-b \geq 0$$

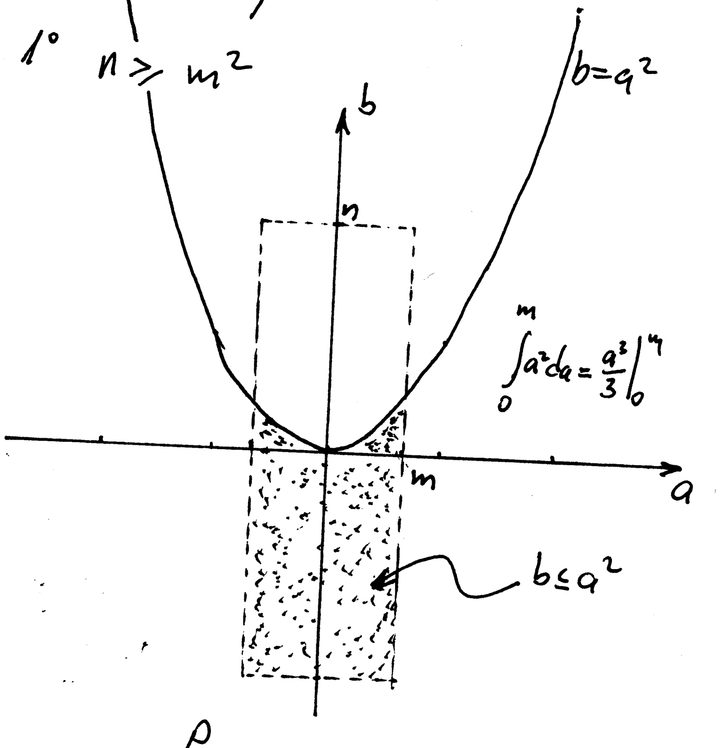
$$a^2 \geq b$$

Prikažimo grafički skup $|a| \leq m$, $|b| \leq n$



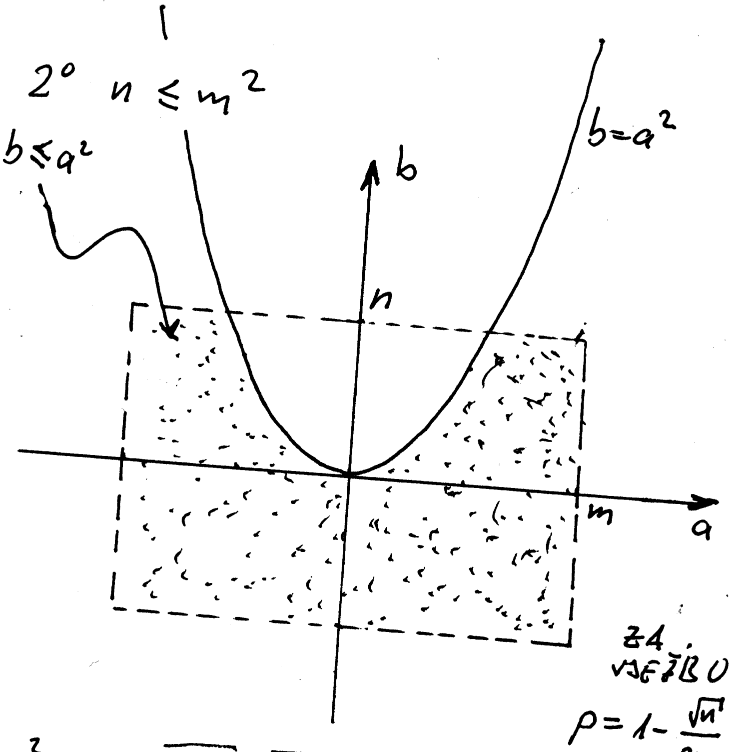
Kod crtanja parabole $b=a^2$ razlikujmo dva slučaja

1° $n \geq m^2$



$$\int_0^m a^2 da = \frac{a^3}{3}\Big|_0^m$$

2° $n \leq m^2$



$$p = \frac{P_{\text{dijela pravougaonika ispod krive}}}{P_{\text{pravougaonika}}} = \frac{2mn+\frac{2}{3}m^2}{4mn} = \frac{1}{2}+\frac{m^2}{6n}$$ tražena vjerovatnoća za 1°.

ZA VJEŽBU

$$p = 1-\frac{\sqrt{n}}{3m}$$ vjerov. za 2°

[51] *Marko putuje od mesta A do mesta C, preko mesta B, konstantnom brzinom. Razdaljina od mesta A do mesta B je $30km$, a razdaljina od mesta B do mesta C je $10km$. U slučajnom trenutku tokom putovanja ga na mobilni telefon zove prijatelj da proveri kada će Marko stići u mesto C. Izračunati verovatnoću da će Marko moći prijatelju da kaže da je već prošao mesto B.*

Rešenje: Prostor događaja možemo opisati na kao $\Omega = [0, 40] = \{x \mid 0 \leq x \leq 40\}$, gde je x razdaljina koju je Marko prešao od početka putovanja do trenutka telefonskog poziva. Pošto ga prijatelj zove tokom putovanja, ukupno rastojanje koje je Marko prešao do trenutka poziva je najviše $30km + 10km = 40km$. Događaj X: „*Marko će moći prijatelju da kaže da je već prošao mesto B*" možemo predstaviti kao skup $X = [30, 40] = \{x \mid 30 \leq x \leq 40\} \subseteq \Omega$.

Svi elementarni ishodi $x \in \Omega$ su jednakoverovatni (jer Marko poziv dobija poziv u slučajnom trenutku), ali se zadatak ne može rešiti na isti način kao npr. zadatak [31] (vidi Laplasovu definiciju verovatnoće) jer broj elementarnih ishoda nije konačan. Naime, i skup Ω i skup X su beskonačni skupovi. Zadatak može da se reši primenom geometrijske definicije verovatnoće jer prostor Ω možemo predstaviti kao duž AC koja je dužine $m(\Omega) = 40$ (merna jedinica nam je kilometar), a događaju X odgovara duž BC koja je dužine $m(X) = 10$. Kako su zadovoljeni svi uslovi za primenu (1.19), sledi

$$\mathsf{P}(X) = \frac{m(X)}{m(\Omega)} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

---

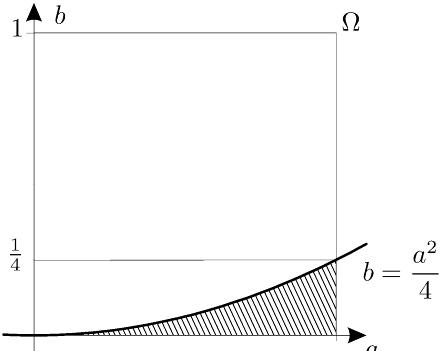
[53] *Na slučajan način se biraju brojevi a i b iz intervala $[0, 1]$. Izračunati verovatnoću da će jednačina $x^2 + ax + b = 0$ imati realna rešenja po nepoznatoj x.*

Rešenje:

Kao što je poznato, kvadratna jednačina ima realna rešenja ukoliko je njena diskriminanta nenegativna, te posmatrana jednačina ima realna rešenja ukoliko je $a^2 - 4b \geq 0$, tj. ako je $b \leq \frac{1}{4}a^2$.

Jedan elementarni ishod možemo predstaviti kao uređeni par $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$, te se skup svih elementarnih ishoda $\Omega = \{(a, b) \mid 0 \leq a \leq 1 \land 0 \leq b \leq 1\}$ može predstaviti u ravni kao kvadrat sa temenima u tačkama $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(1, 0)$. Ovaj kvadrat je površine $m(\Omega) = 1$. Događaju R: „*rešenja jednačine su realni brojevi*" odgovara tada oblast $R = \{(a, b) \in \Omega \mid b \leq \frac{1}{4}a^2\}$ (vidi sliku). Površinu ove oblasti možemo izračunati korišćenjem intergralnog računa:

$$m(R) = \int_0^1 \frac{1}{4}a^2 da = \frac{1}{4}\frac{a^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$



Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se brojevi a i b biraju na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

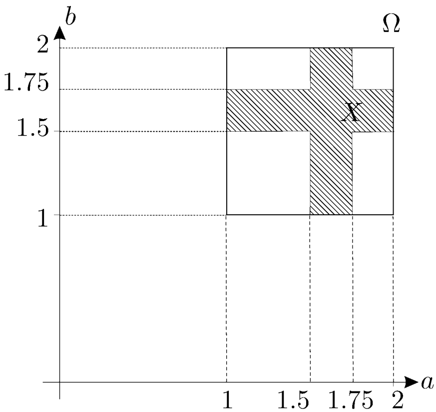
$$\mathsf{P}(R) = \frac{m(R)}{m(\Omega)} = \frac{1}{12} \approx 0.0833.$$

---

[52] *Autobus stiže u stanicu u $1:30$ časova, a odlazi u $2:45$. Ana i branko dolaze na stanicu u slučajnim trenucima (svako za sebe) između $1:00$ i $2:00$. Svako od njih ulazi u autobus ako je došao u trenutku kada je autobus u stanici, a inače odlaze (npr. odustaju od putovanja). Izračunati verovatnoću da će se bar jedna od navedenih osoba naći u autobusu.*

Rešenje:

Jedan elementarni ishod možemo predstaviti kao uređeni par $(a,b) \in [1,2]\times[1,2]$ gde a i b redom predstavljaju vremena kada su Ana odnosno Branko stigli na stanicu, te se skup svih elementarnih ishoda $\Omega = \{(a,b) \mid 1 \le a \le 2 \ \wedge \ 1 \le b \le 2\}$ može predstaviti u ravni kao kvadrat sa temenima u tačkama $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ i $(1,2)$ (merna jedinica nam je jedan sat). Ovaj kvadrat je površine $m(\Omega) = 1$. Događaju X: „*bar jedna od navedenih osoba će se naći u autobusu*" odgovara tada u ravni oblast $X = \{(a,b) \in \Omega \mid 1.5 \le a \le 1.75 \ \vee \ 1.5 \le b \le 1.75\}$ (vidi sliku). Oblast X površine $m(X) = 0.25\cdot 1 + 0.25\cdot 0.25 + 0.5\cdot 0.25 = 0.4375$.



Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se brojevi a i b biraju na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(X) = \frac{m(X)}{m(\Omega)} = 0.4375.$$

---

[54] *Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka iz lopte. Izračunati verovatnoću da će biti izabrana tačka iz kocke.*

Rešenje: Skup elementarnih ishoda možemo predstaviti kao skup L tačaka lopte, a događaju K: „*izabrana tačka pripada kocki*" odgovara tada skup K tačaka kocke. Ako je ivica kocke dužine a, tada je poluprečnik r lopte jednak polovini telesne dijagonale kocke, tj. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Zapremina lopte je

$$m(L) = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi,$$

a zapremina kocke je $m(K) = a^3$. Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se tačka bira na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(K) = \frac{m(K)}{m(L)} = \frac{a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 0.3676.$$

Nezavisni događaji

Za dva događaja E i F kažemo da su nezavisni ako

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

Prema jednakosti $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$ ovo povlači da su E i F nezavisni ako

$$P(E|F) = P(E)$$

(što također povlači da je $P(F|E) = P(F)$). Tj. E i F su nezavisni događaji ako znanje da je se F pojavilo ne utiče na vjerovatnoću pojavljivanja događaja E. Tj. pojavljivanje događaja E je nezavisno od pojavljivanja događaja F.

Za dva događaja E i F koja nisu nezavisna kažemo da su zavisna.

(#) Ako je $p(A)=\frac{1}{3}$, $p(B)=\frac{3}{4}$ i $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$ izračunati

(a) $P(A\cup B)$

(b) $P(B|A)$

(c) Da li su A i B nezavisni događaji? Objasniti!

Rj.

$A\cap B$ smo označavali sa AB, time je $P(AB)=\frac{1}{6}$

(a)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$$

(b)

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

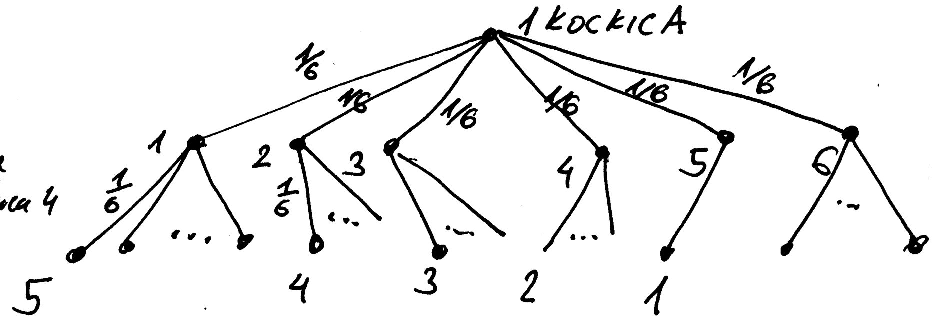
(c) S obzirom da je

$$P(A)\cdot P(B)\neq P(AB) \qquad \left(P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4},\ P(AB)=\frac{1}{6}\right)$$

zaključujemo da događaji A i B nisu nezavisni.

(#) Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Neka je E_1 događaj da je suma dvije bačene kockice 6, a neka je F događaj da je prva kockica jednaka 4. Da li su događaji E_1 i F nezavisni?

Rj. $P(F) = \frac{1}{6}$



E_1F - događaj da je suma dvije bačene kockice 6 pošto je prva kockica 4

$$P(E_1F) = \frac{1}{36}$$

$$P(E_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(E_1) \cdot P(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

Kako je $P(E_1F) \neq P(E_1)P(F)$ to su događaji E_1 i F zavisni događaji

(#) Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Ako sa E_2 označimo događaj da je suma dvije bačene kockice 7, a sa F događaj da je prva bačena kockica jednaka 4, da li su tada događaji E_2 i F nezavisni.

Rj. $P(F) = \frac{1}{6}$, $P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(E_2F) = \frac{1}{36}$ $\qquad P(E_2) \cdot P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Kako je $P(E_2F) = P(E_2)P(F)$ događaji E_2 i F su nezavisni događaji.

Definicija nezavisnosti događaja se može proširiti na više od dva događaja. Za događaje $E_1, E_2, \ldots, E_n$ kažemo da su nezavisni ako za svaki podskup $E_{1'}, E_{2'}, \ldots, E_{r'}$, $r \leq n$, ovih događaja vrijedi

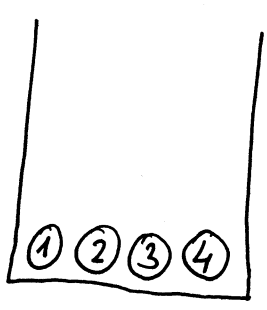
$$P(E_{1'} E_{2'} \ldots E_{r'}) = P(E_{1'}) P(E_{2'}) \ldots P(E_{r'})$$

Intuitivno, događaji $E_1, E_2, \ldots, E_n$ su nezavisni ako znanje o pojavljivanju bilo kojeg od ovih događaja ne utiče na vjerovatnoću bilo kojeg drugog događaja

\# (PARNO NEZAVISNI DOGAĐAJI KOJI NISU NEZAVISNI)

Pretpostavimo da izvlačimo kuglicu iz kutije koja sadrži četri kuglice sa brojevima 1, 2, 3 i 4. Sa E, F i G označimo sljedeće događaje: $E = \{1,2\}$, $F = \{1,3\}$ i $G = \{1,4\}$. Da li su E, F i G nezavisni događaji? Da li su E, F i G parno nezavisni događaji?

Rj.



$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(G) = \frac{1}{2}$$

$$EF = \{1\}, \quad EG = \{1\}, \quad FG = \{1\}$$

$$P(EF) = P(E)P(F) = \frac{1}{4}$$
$$P(EG) = P(E)P(G) = \frac{1}{4}$$
$$P(FG) = P(F)P(G) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ E, F i G su parno nezavisni događaji

$$EFG = \{1\}$$

$$\frac{1}{4} = P(EFG) \neq P(E)P(F)P(G) = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ E, F i G nisu nezavisni događaji

Bajes-ova formula

Neka su E i F događaji. Događaj E možemo napisati kao

$$E = EF \cup EF^c$$

zato što, da bi tačka bila u E, ona mora ili biti u E i F ili mora biti u E ali ne u F. Kako su EF i EF^c međusobno isključivi, imamo da

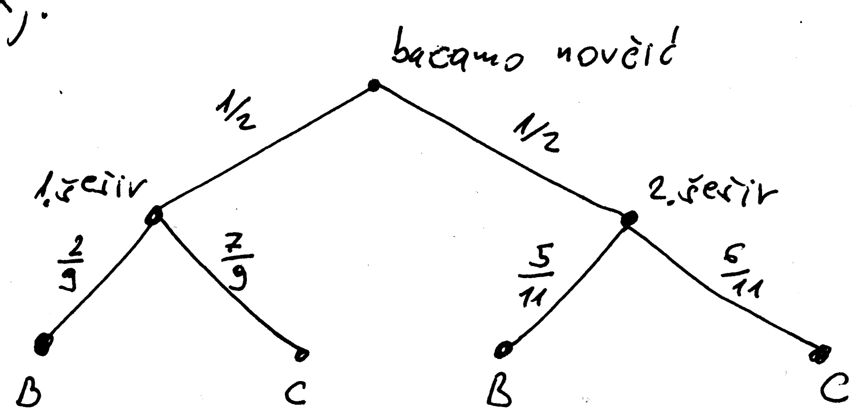
$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)(1-P(F)) \end{aligned}$$

Zadnja jednakost tvrdi da je vjerovatnoća događaja E jednaka prosječnoj težini uslovne vjerovatnoće od E ako je poznato da je se pojavilo F i uslovne vjerovatnoće od E ako je dato da se F nije pojavilo, gdje je svaka uslovna vjerovatnoća data kao što veća težina kao događaji na kojima se uslov pojavljuje.

$$\underline{P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}$$

(#) Posmatrajmo dva šešira koja sadrže kuglice. Prvi šešir sadrži dvije bijele i sedam crnih kuglica, a drugi šešir sadrži pet bijelih i šest crnih kuglica. Bacamo novčić i u zavisnosti od izlaza pisma ili glave izvlačimo kuglicu iz prvog ili drugog šešira. Kolika je uslovna vjerovatnoća da je novčić pokazao glavu ako nam je poznato da smo izvukli bijelu kuglicu.

Rj.



Sa H i W označimo sljedeće događaje:

H: "Novčić je pokazao glavu."

W: "Izvučena je bijela kuglica."

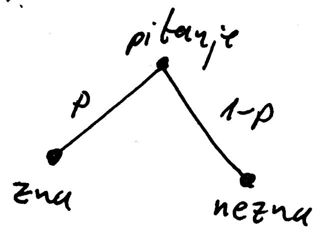
Željena vjerovatnoća je $P(H|W)$ koju ćemo izračunati na sljedeći način.

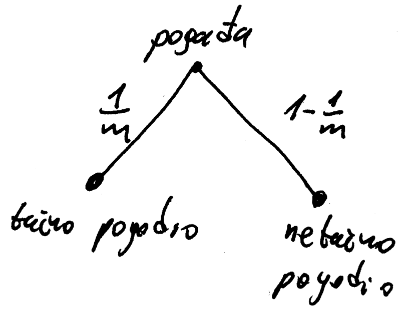
$$P(H|W) = \frac{P(HW)}{P(W)} = \frac{P(W|H)P(H)}{P(W)} = \frac{P(W|H)P(H)}{P(W|H)P(H)+P(W|H^c)P(H^c)};$$

$$= \frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{22}{67}$$

(#) U odgovaranju na pitanja koja imaju mnogostruke odgovore na testu student ili zna odgovor ili pogađa odgovor. Neka je p vjerovatnoća da student zna odgovor a $1-p$ vjerovatnoća da student nezna odgovor. Pretpostavimo da student koji pogađa odgovor će tačno pogoditi sa vjerovatnoćom $\frac{1}{m}$, gdje je m broj višestrukih-odgovor alternativa. Kolika je uslovna vjerovatnoća da student zna odgovor na pitanje ako je dato da je odgovorio tačno?

Rj.:





Sa C i K označimo sljedeće događaje

C: "Student je odgovorio tačno na postavljeno pitanje."

K: "Student zna odgovor na pitanje".

Nama treba $P(K|C)$.

$$P(K|C) = \frac{P(KC)}{P(C)} = \frac{P(C|K)\,P(K)}{P(C|K)P(K) + P(C|K^c)\,P(K^c)} =$$

$$= \frac{1\cdot p}{1\cdot p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

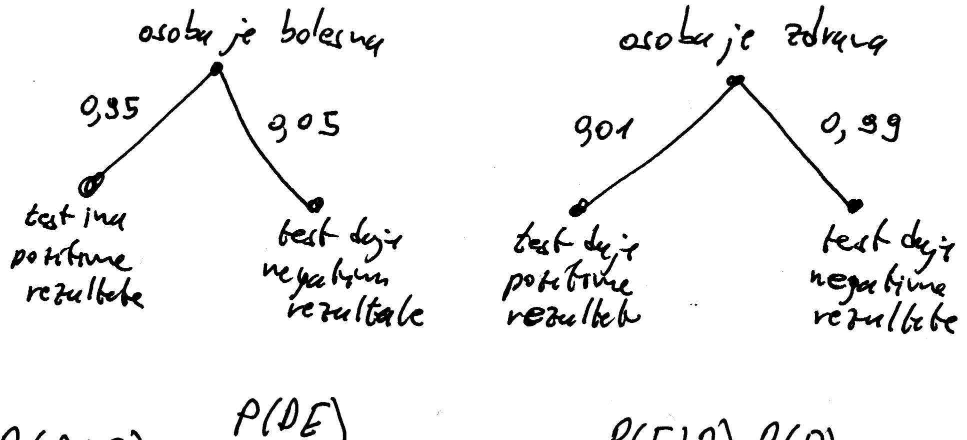
Time, na primjer, ako je $m=5$, $p=\frac{1}{2}$, tada vjerovatnoća da student zna odgovor na pitanje koje je odgovorio tačno je $\frac{5}{6}$.

\# Laboratorijski test krvi je 95% efikasan u otkrivanju određene bolesti kada je, u stvari, ta bolest prisutna. Ali, sa druge strane, test također daje "pogrešne pozitivne" rezultate za 1% testiranih osoba koje su zdrave. (Tj. ako se zdrava osoba testira, tada, sa vjerovatnoćom od 0,01 test kao rezultat daje da osoba ima tu bolest.) Ako 0,5 postotaka populacije zaista ima datu bolest, kolika je vjerovatnoća da osoba ima datu bolest, ako nam je dato da je rezultat testa pozitivan?

Rj.: Sa D i E označimo sljedeće događaje

D: "Testirana osoba ima bolest"

E: "Rezultati testa su pozitivni" Tražimo $P(D|E)$



$$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(E|D)\,P(D)}{P(E|D)\,P(D) + P(E|D^c)\,P(D^c)} =$$

$$= \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,95 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995} = \frac{95}{294} \approx 0,323$$

Time, samo 32% onih osoba čiji je test dao pozitivne rezultate zaista imaju datu bolest.

Jednakost $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$ se može poopštiti na sljedeći način. Pretpostavimo da su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ međusobno isključivi događaji takvi da $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$. Drugim riječima, tačno jedan od događaja $F_1, F_2, \ldots, F_n$ će se pojaviti. Pišući

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i$$

i koristeći činjenicu da su događaji EF_i, $i=1,2,\ldots,n$ međusobno isključivi, dobijamo da

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i) \qquad \ldots (*)$$

Time, jednakost $(*)$ pokazuje kako, za date događaje $F_1, F_2, \ldots, F_n$ od kojih jedan i samo jedan se mora pojaviti, možemo izračunati $P(E)$ tako što ćemo prvo "usloviti" koji od F_i bi se mogao pojaviti. Tj. tvrdnja tvrdi da je $P(E)$ jednak prosječnoj težini od $P(E|F_i)$, gdje je težina člana određena vjerovatnoćom događaja na kojem je postavljen uslov.

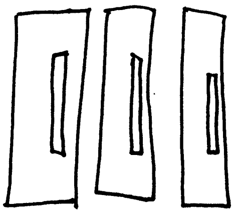
Pretpostavimo sada da je se E pojavilo i da nas zanima koji od F_j se također pojavio. Prema jednakosti $(*)$ imamo

$$\boxed{P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}}$$

Zadnja jednakost je poznata kao Bejes-ova formula,

(#) Pretpostavimo da imate tri sandučića u koje možete dobiti pismo. Znate da jedno pismo ovih dana mora doći i da može biti u bilo kojem od tri data sandučića. Neka je α_i vjerovatnoća da ćete pronaći svoje pismo brzim pregledom sandučića i $(i=1,2,3)$ ako je pismo stiglo. (Možemo pretpostaviti da je $\alpha_i<1$.) Pretpostavimo da ste nabrzinu pretražili sandučić 1 i da niste našli pismo. Kolika je vjerovatnoća da je pismo u sandučiću 1?

Rj.:



1 2 3

Neka su:

F_1 događaj da je pismo u sandučiću 1;

F_2 događaj da je pismo u sandučiću 2;

F_3 događaj da je pismo u sandučiću 3;

E događaj da smo pretražili sandučić 1 i da nismo našli pismo.

Trebamo odrediti $P(F_1|E)$.

Primjetimo da $P(F_1)=\frac{1}{3}$, $P(F_2)=\frac{1}{3}$, $P(F_3)=\frac{1}{3}$

$P(E|F_1)=1-\alpha_1$, $P(E|F_2)=1$, $P(E|F_3)=1$

Primjerom Bajesove formule imamo

$$P(F_1|E)=\frac{P(E|F_1)P(F_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(E|F_i)P(F_i)}=$$

$$=\frac{(1-\alpha_1)\frac{1}{3}}{(1-\alpha_1)\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}$$

[56] *U kutiji se nalaze 3 obična novčića i jedan defektni novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.*

(b) *Ako je oba puta pao grb, koliko iznosi verovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?*

Rešenje: Označimo događaje:

H_1 - „*iz kutije je izabran ispravan novčić*”,
H_2 - „*iz kutije je izabran novčić sa grbom na obe strane*”,
A - „*pri bacanju novčića će oba puta pasti grb*”,
A_1 - „*pri prvom bacanju novčića će pasti grb*”,
A_2 - „*pri drugom bacanju novčića će pasti grb*”.

(a) Očigledno je $\{H_1, H_2\}$ potpun sistem događaja[1] ($H_1H_2 = \emptyset$ i $H_1 + H_2 = \Omega$), i primenom (1.18) se dobija $\mathsf{P}(H_1) = \frac{3}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{4}$. Događaj A može se predstaviti kao $A = A_1A_2$, i na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2) =$

$= \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A_1A_2|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A_1A_2|H_2)$

gde je

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_i) = \frac{\mathsf{P}(A_1A_2H_i)}{\mathsf{P}(H_i)} = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A_1|H_i)\,\mathsf{P}(A_2|H_iA_1)}{\mathsf{P}(H_i)} = \mathsf{P}(A_1|H_i)\,\mathsf{P}(A_2|H_iA_1)$, $i \in \{1, 2\}$,

odnosno

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_1) = \mathsf{P}(A_1|H_1)\,\mathsf{P}(A_2|H_1A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_2) = \mathsf{P}(A_1|H_2)\,\mathsf{P}(A_2|H_2A_1) = 1 \cdot 1 = 1$,

te je

$$\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{7}{16}\,.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) se dobija

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}\,.$$

---

[62] *Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Ako je izvučena tref karta, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 3 crne kuglice, a u ostalim slučajevima, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 4 bele i 1 crna kuglica.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će biti izvučene kuglice istih boja.*

(b) *Ako se zna da su izvučene kuglice različitih boja, izračunati verovatnoću da je izvučena tref karta.*

---

[1] Zapravo je $H_2 = \overline{H}_1$.

Rešenje: U špilu od 52 karte je 13 tref karata i 39 karata koje nisu tref. $\mathsf{P}(H_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$, gde je sa H_1 označen događaj „*iz špila je izvučena tref karta*" i $H_2 = \overline{H_1}$. Posmatramo događaj A–„*izvučene su kuglice iste boje*". Događaj A se realizuje ako se iz kutije izvuku 2 bele ili 2 crne kuglice.

(a) Uvrštavanjem

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} \qquad\qquad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

u formulu totalne verovatnoće (1.16) dobija se

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{10} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{6}{10} = \tfrac{11}{20}.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}\left(H_1|\overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_1\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\mathsf{P}(H_1)(1-\mathsf{P}(A|H_1))}{1-\mathsf{P}(A)} = \frac{1}{3}.$$

---

[57] *U tri magacina se nalaze mašinski strugovi, i to:*

magacin 1: 10 *strugova, od čega* 4 *neispravna,*
magacin 2: 6 *strugova, od čega* 1 *neispravna,*
magacin 3: 8 *strugova, od čega* 3 *neispravna.*

Iz slučajno odabranog magacina se nasumice odabira jedan strug.

(a) *Izračunati verovatnoću da će odabrani strug biti neispravan.*

(b) *Izračunati verovatnoću da je odabrani strug iz magacina* 2 *ako se zna da je taj strug ispravan.*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani strug je neispravan*",
H_i - „*odabrani strug potiče iz magacina* $i \in \{1,2,3\}$".

(a) Očigledno je $\{H_1, H_2, H_3\}$ potpun sistem događaja, i primenom (1.18) (magacin se bira na slučajan način) se dobija $\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{3}$, $i \in \{1,2,3\}$, a koristeći navedene podatake o broju neispravnih i ukupnom broju strugova koji su raspoređeni po pojedinim magacinama se primenom (1.18) dobija $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(A|H_3) = \frac{3}{8}$.

Na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A|H_i) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{113}{360} \approx 0.3139\,.$$

(b) Koristeći $\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A) = \frac{247}{360} \approx 0.6861$ i $\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_2\right) \overset{(1.3)}{=} 1 - \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{5}{6}$, primenom Bajesove formule (1.17) se dobija

$$\mathsf{P}\left(H_2|\overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_2\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{247}{360}} = \frac{100}{247} \approx 0.4049\,.$$

---

[58] *Prva kutija sadrži* 5 *crvenih i* 6 *belih kuglica, a druga kutija sadrži* 4 *crvene i* 4 *bele kuglice. Iz prve kutije se nasumice izvlači jedna kuglica i premešta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.*

(b) *Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premeštena crvena kuglica?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*iz druge kutije će se izvući crvena kuglica*",
H_c - „*iz prve u drugu kutiju je premeštena crvena kuglica*",
H_b - „*iz prve u drugu kutiju je premeštena bela kuglica*".

(a) $\{H_c, H_b\}$ je potpun sistem događaja, i primenom (1.18) (kuglica se iz prve kutije bira na slučajan način) dobija se $\mathsf{P}(H_c) = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$ i $\mathsf{P}(H_b) = \frac{6}{11}$. Koristeći podatake o sadržaju druge kutije u zavisnosti od toga da li je u nju iz prve kutije premeštena crvena ili bela kuglica se primenom (1.18) dobija
$\mathsf{P}(A|H_c) = \frac{4+1}{4+4+1} = \frac{5}{9}$, $\quad \mathsf{P}(A|H_b) = \frac{4+0}{4+4+1} = \frac{4}{9}$.
Na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_c)\,\mathsf{P}(A|H_c) + \mathsf{P}(H_b)\,\mathsf{P}(A|H_b) = \frac{5}{11}\cdot\frac{5}{9} + \frac{6}{11}\cdot\frac{4}{9} = \frac{49}{99} \approx 0.4949\,.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}(H_c|A) = \frac{\mathsf{P}(H_c)\,\mathsf{P}(A|H_c)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{49}{99}} = \frac{25}{49} \approx 0.5102\,.$$

---

[59] *Od ukupne proizvodnje jedne zanatske radionice,* 50% *se proizvodi na mašini* M_1, 20% *na mašini* M_2, *i* 30% *na mašini* M_3. *Na mašini* M_1 *se u proseku napravi* 3% *neispravnih proizvoda (škarta), na mašini* M_2 *u proseku* 5%, *a na mašini* M_3 *u proseku* 4% *neispravnih proizvoda. Na slučajan način se bira jedan proizvod iz posmatrane radionice.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će odabrani proizvod biti ispravan.*

(b) *Ako je odabrani proizvod ispravan, koliko iznosi verovatnoća da je on proizveden na mašini* M_3*?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani proizvod će biti ispravan*",
H_i - „*odabrani proizvod je proizveden na mašini* M_i, $i \in \{1,2,3\}$".

Analogno kao u zadacima [56], [57], [58], rezultati se mogu dobiti primenom formule totalne verovatnoće (1.16) i Bajesove formule (1.17):

(a) $\mathsf{P}(H_1) = \frac{50}{100}$, $\quad \mathsf{P}(H_2) = \frac{20}{100}$, $\quad \mathsf{P}(H_3) = \frac{30}{100}$,
$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{100-3}{100} = \frac{97}{100}$, $\quad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{100-5}{100} = \frac{95}{100}$, $\quad \mathsf{P}(A|H_3) = \frac{100-4}{100} = \frac{96}{100}$,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A|H_i) = \frac{50}{100}\cdot\frac{97}{100} + \frac{20}{100}\cdot\frac{95}{100} + \frac{30}{100}\cdot\frac{96}{100} = 0.963\,.$$

(b)
$$\mathsf{P}(H_3|A) = \frac{\mathsf{P}(H_3)\,\mathsf{P}(A|H_3)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{30}{100}\cdot\frac{96}{100}}{\frac{963}{1000}} = \frac{288}{963} \approx 0.2991\,.$$

---

[60] *Proizvod izrađen u jednoj radionici kontroliše jedan od dva kontrolora. Verovatnoće da će proizvod na kontrolu stići kod prvog odnosno drugog kontrolora redom iznose* 0.6 *odnosno* 0.4. *Verovatnoća da će proizvod proći kao proizvod koji zadovoljava standarde kod prvog kontrolora iznosi* 0.94, *a kod drugog* 0.98. *Ako je jedan slučajno odabrani proizvod priznat kao proizvod koji zadovoljava standarde, koliko iznosi verovatnoća da ga je kontrolisao prvi kontrolor?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani proizvod je zadovoljio kriterijume kontrolora*",
H_i - „*odabrani proizvod je kontrolisao i-ti kontrolor,* $i \in \{1,2\}$".

Analogno zadacima [56], [57], [58], [59], rezultati se mogu dobiti primenom Bajesove formule (1.17):

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)},$$

pri čemu se $\mathsf{P}(A)$ može izračunati primenom formule totalne verovatnoće (1.16):

$\mathsf{P}(H_1) = 0.6, \quad \mathsf{P}(H_2) = 0.4,$

$\mathsf{P}(A|H_1) = 0.94, \quad \mathsf{P}(A|H_2) = 0.98,$

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2).$

Dakle,

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)} = \frac{0.6 \cdot 0.94}{0.6 \cdot 0.94 + 0.4 \cdot 0.98} \approx 0.5900\,.$$

---

[61] *Dinar se baca dva puta. Ako je oba puta pao grb, iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 1 crna kuglica izvlači se dva puta zaredom kuglica sa vraćanjem u kutiju. U ostalim slučajevima izvlači se dva puta zaredom kuglica sa vraćanjem iz kutije u kojoj se nalaze 1 bela i 2 crne kuglice.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će oba puta biti izvučena bela kuglica.*

(b) *Ako je oba puta izvučena bela kuglica izračunati verovatnoću događaja da grb nije pao oba puta.*

Rešenje: Označimo događaje:

H_1 - „*oba puta pao grb*",
H_2 - „*palo bar jedno pismo*",
A - „*izvučene dve bele kuglice*".

Događaji H_1 i H_2 čine potpun sistem događaja i njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{3}{4}$.

(a) Na osnovu uslova zadatka sledi $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ i $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, te primenom formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{4}{9} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{7}{36}.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}(H_2|A) = \tfrac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \tfrac{3}{7}.$$
